CAPíTULO 14

Séries de Fourier-Bessel

Pode-se mostrar que as funções de Bessel de primeira espécie satisfazem à seguinte condição[1]:

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = \begin{cases} \frac{\beta J_p(\alpha)J_p'(\beta)-\alpha J_p(\beta)J_p'(\alpha)}{\alpha^2-\beta^2}, \text{ se } \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{2}\left(J_p'(\lambda)^2 + \left(1-\frac{p^2}{\lambda^2}\right)(J_p(\lambda))^2\right), \text{ se } \alpha=\beta=\lambda \end{cases} \tag{14.1}$$

Em particular, se α e β forem raízes positivas distintas de $J_p(x)$, temos a seguinte *relação de ortogonalidade*

$$\int_0^1 xJ_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = 0$$

Esta relação sugerem a criação do seguinte *produto interno com peso* x entre duas funções com domínio $[0,1]$:

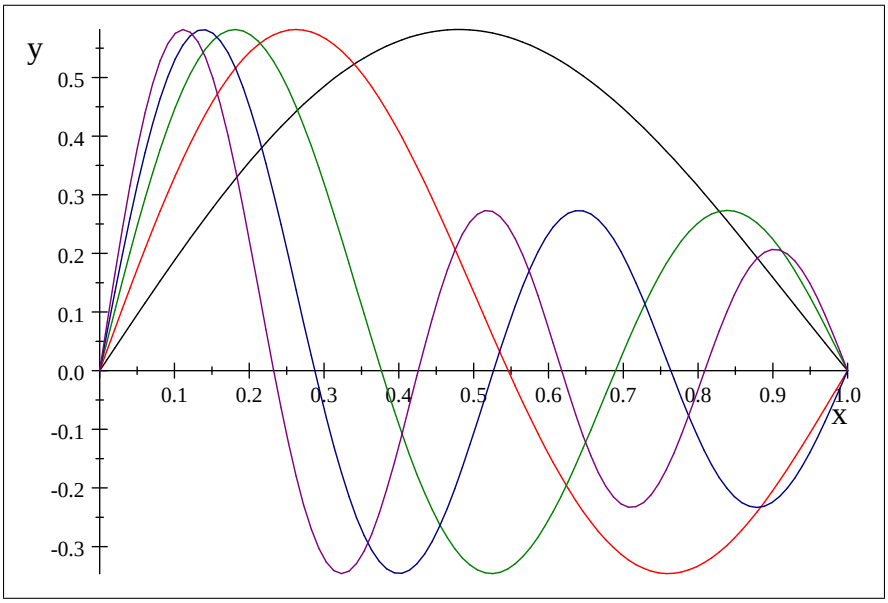
$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 xf(x)\,g(x)\,dx$$

Note que esta operação define, de fato, um produto interno. Fixe um determinado p e considere as funções $\phi_n(x) = J_p(\lambda_n x)$ onde $n = 1,2,3,...$ e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ são as raízes positivas de $J_p(x)$. A relação de ortogonalidade acima diz simplesmente que o conjunto $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, ...\}$ é ortogonal com relação a este produto interno!

EXEMPLO 111. *As raízes das funções de Bessel, e de suas derivadas, são tabeladas. Por exemplo, aqui estão as cinco primeiras raízes positivas das funções de Bessel e suas derivadas, de ordens* 0 *a* 5*:*

	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_0'	J_1'	J_2'	J_3'	J_4'	J_5'
λ_1	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	3.8317	1.8412	3.0542	4.2012	5.3175	6.4156
λ_2	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	7.0156	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199
λ_3	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	10.1735	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872
λ_4	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	13.3237	11.7060	13.1704	14.5858	15.9641	17.3128
λ_5	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	16.4706	14.8636	16.3475	17.7887	19.1960	20.5755

A título de exemplo, tomemos $p = 1$*; as funções* $\phi_n(x) = J_1(\lambda_n x)$ *têm os seguintes gráficos no intervalo* $[0,1]$*:*



Note que $\phi_n(1) = J_p(\lambda_n) = 0$ *para* $n = 1,2,3,....$ *As funções* ϕ_n *desempenham no intervalo* $[0,1]$ *um papel análogo ao das funções* $\sin(nx)$ *no intervalo* $[0,\pi]$*, como veremos a seguir.*

[1] A expressão do caso $\alpha \neq \beta$ é o último exercício da aula anterior; fixando nesta expressão $\beta = \lambda$ e tomando $\alpha \to \lambda$, obtém-se a segunda fórmula.

Suponha agora que uma função $f(x)$ seja uma combinação linear das funções ϕ_n, digamos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n(x)$$

então, como as ϕ_n são ortogonais, sabemos da Álgebra Linear que

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} = \frac{\int_0^1 x f(x) \phi_n(x)\, dx}{\int_0^1 x \phi_n^2(x)\, dx}$$

Como há, de fato, uma infinidade de funções ϕ_n, mesmo que $f(x)$ não seja uma combinação linear destas funções, ainda assim podemos tentar expressá-la como uma série infinita. Esta idéia inspira a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 112. *Seja $f(x)$ uma função com domínio $[0,1]$. A* série de Fourier-Bessel *de $f(x)$ é a série*[2]

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x)$$

onde λ_1, λ_2, λ_3,... são as raízes de $J_p(x)$ e

$$c_n = \frac{\int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x)\, dx}{\int_0^1 x J_p^2(\lambda_n x)\, dx}$$

ou seja

$$c_n = \frac{2}{\left(J_p'(\lambda_n)\right)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x)\, dx = \frac{2}{\left(J_{p\pm1}(\lambda_n)\right)^2} \int_0^1 x f(x) J_p(\lambda_n x)\, dx.$$

COMENTÁRIO 113. *De fato, para que as funções $J_p(\lambda_n x)$ sejam ortogonais com peso x, bastaria que as constantes λ_n fossem as soluções de uma equação da forma*

$$A J_p(\lambda) + B\lambda J_p'(\lambda) = 0$$

onde $A, B \in \mathbb{R}$; neste texto estamos nos limitando ao caso em que $A = 1$ e $B = 0$ (o caso $A = 0$ e $B = 1$ é mencionado nos exercícios). A teoria que determina qual o produto interno correto para cada EDO chama-se ***Teoria de Sturm-Liouville****.*

TEOREMA 114. *Assim como nas séries de Fourier, pode-se mostrar que, se $f(x)$ é seccionalmente suave, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\lambda_n x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

para todo $x \in (0,1)$.

EXEMPLO 115 (Equação da Onda no Tambor). *Continuando o exemplo da aula anterior, vamos resolver o problema da onda num tambor circular com (i) extremidades fixas; (ii) velocidade inicial nula e (iii) posição inicial circularmente simétrica. Pela simetria do problema, esperamos encontrar soluções que não dependam de θ. Assim, o problema a ser resolvido é:*

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r \text{ para } r < 1 \text{ e } t > 0 \\ u(1,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u_t(r,0) = 0 \text{ para } r < 1 \\ u(r,0) = f(r) \text{ para } r < 1 \end{cases}$$

Como vimos na aula anterior, o método de separação de variáveis aplicado às 3 primeiras equações acima nos dá soluções do tipo

$$u_\lambda(r,t) = J_0(\lambda r)(\alpha \sin \lambda t + \beta \cos \lambda t)$$

A condição $u_t(r,0) = 0$ diz simplesmente que $\alpha = 0$; já a condição $u(1,t) = 0$ indica que $J_0(\lambda) = 0$, isto é, λ tem de ser uma das raízes da função $J_0(x)$. Denominando tais raízes por λ_1, λ_2, λ_3,... chegamos às seguintes soluções da parte homogênea do problema

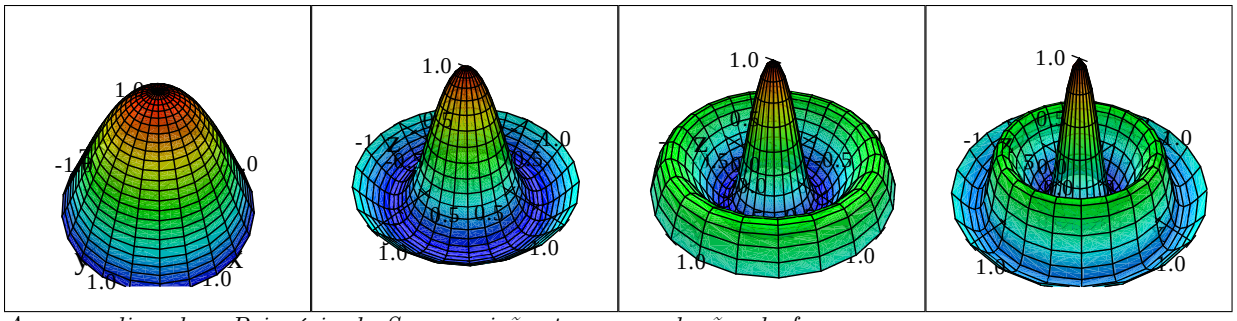
$$u_n(r,t) = J_0(\lambda_n r) \cos(\lambda_n t)$$

Assim como as funções $\sin(nx)$ são os harmônicos fundamentais de uma corda de comprimento π fixada nas extremidades, estas funções $\phi_n(r,t) = J_0(\lambda_n r)\cos(\lambda_n t)$ são os harmônicos fundamentais[3] *de uma membrana circular de raio 1 fixada nas extremidades. As figuras abaixo mostram os gráficos de ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 e ϕ_4 para $t = 0$ – as animações correspondentes a estas oscilações estão no site!*

---

[2] Se o domínio de $f(x)$ for $[0, L]$, troque cada x por $\frac{x}{L}$ nas fórmulas a seguir.

[3] Para ser exato, estes são os modos de vibração rotacionalmente simétricos; há outros modos de vibração que dependem de θ e que não estão nesta lista.



Agora, aplicando o Princípio da Superposição, teremos soluções da forma

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)\cos(\lambda_n t)$$

Como ajustar os coeficientes c_n para que valha a última condição $u(r,0) = f(r)$? Ora, queremos

$$u(1,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r) = f(r)$$

ou seja, os coeficientes c_n são exatamente os coeficientes da série de Fourier-Bessel de $f(r)$ (e a igualdade vale desde que f seja contínua e se anule em $r = 1$). Em suma, a solução procurada é

$$\begin{aligned} u(r,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r)\cos(\lambda_n t) \\ \text{onde } c_n &= \frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_n x)\,dx \end{aligned}$$

14.1. Exercícios

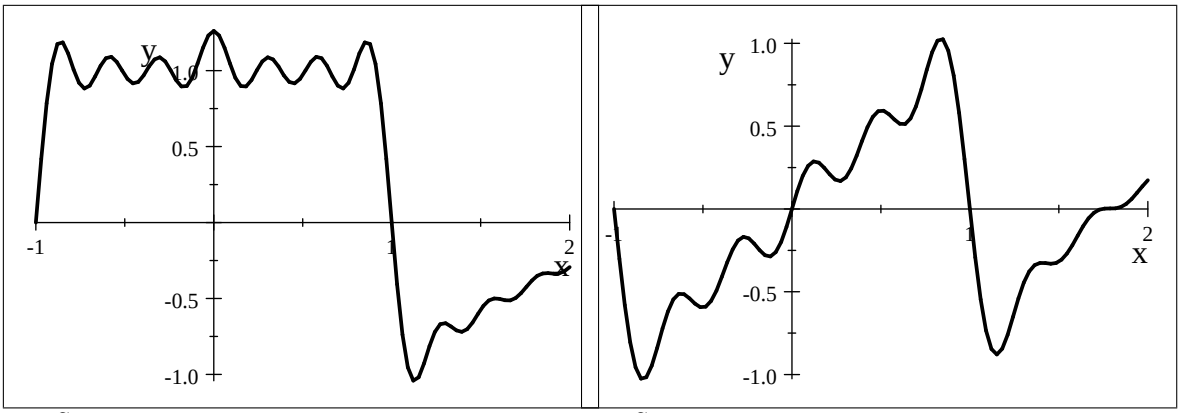
1) Mostre que a expansão da função $f(x) = 1$ (domínio $0 < x < 1$) em série de Fourier-Bessel de ordem 0 é

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

onde λ_1, λ_2, ... são as raízes de $J_0(x)$.

2) Mostre que a série de Fourier-Bessel de ordem 1 de $f(x) = x$ (domínio $0 < x < 1$) é

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_2(\lambda_n)}{\lambda_n J_0^2(\lambda_n)} J_1(\lambda_n x)$$



Soma dos 7 primeiros termos da série do problema 1

Soma dos 5 primeiros termos da série do problema 2

3) Mostre que a solução do Problema da Onda em coordenadas polares

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r \text{ para } r < 1 \text{ e } t > 0 \\ u(1,t) = 0 \text{ para } t > 0 \\ u_t(r,0) = 0 \text{ para } r < 1 \\ u(r,0) = 1 \text{ para } r < 1 \end{cases}$$

é

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}J_0(\lambda_n r)\cos(\lambda_n t)$$

4) As bordas de uma placa bidimensional homogênea circular de raio 1 são mantidas em temperatura zero, e o resto da placa é isolado do meio ambiente. Se a distribuição inicial de temperatura for rotacionalmente simétrica, é de se esperar que a temperatura dependa apenas da distância ao centro da placa e do tempo, isto é, que seja da forma $u=u(r,t)$. Assim, chegamos ao problema

$$\begin{cases} u_t=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r \text{ para } r<1 \text{ e } t>0 \\ u(1,t)=0 \text{ para } t>0 \\ u(r,0)=f(r) \text{ para } r<1 \end{cases}$$

Mostre que a solução limitada deste problema é

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r) \text{ onde } c_n=\frac{2}{J_1^2(\lambda_n)}\int_0^1 x f(x)J_0(\lambda_n x)\,dx$$

e λ_1, λ_2, ... são as raízes positivas de $J_0(x)$.

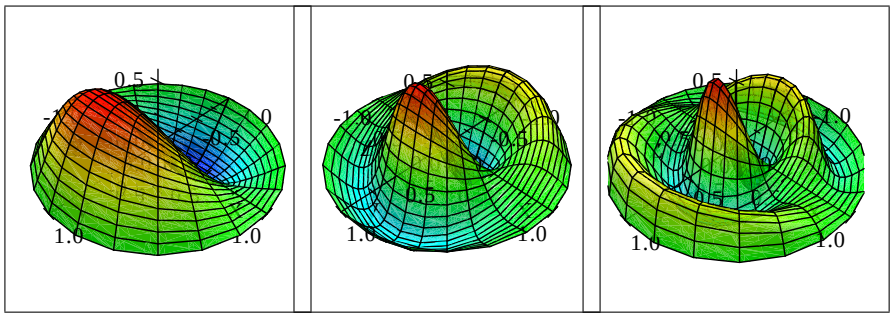
5) Seja p um número inteiro e w e θ_0 reais quaisquer. Mostre que as funções

$$u_{pw}(r,\theta,t)=J_p(wr)\sin(p\theta+\theta_0)\cos(wct)$$

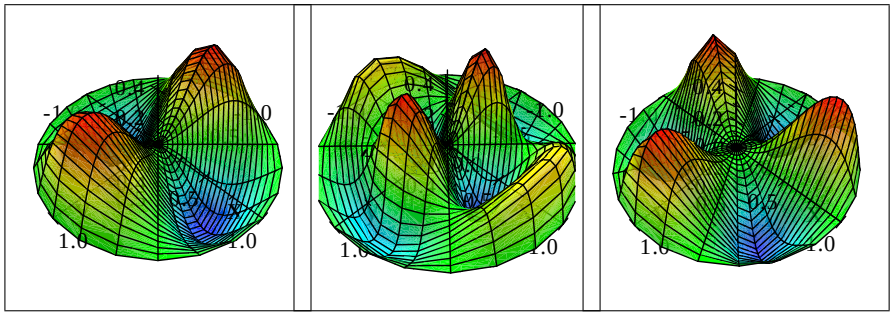
são soluções separadas do problema da onda

$$u_{tt}=c^2\left(u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right)$$

Em particular, se quisermos que tais soluções também satisfaçam a condição $u(R,\theta,t)=0$ para algum R fixo, então devemos tomar $w=\frac{\lambda_n}{R}$ onde λ_n é uma das raízes de J_p (o caso $p=0$ corresponde às soluções rotacionalmente simétricas encontradas no texto; mostramos abaixo os gráficos de outras soluções em $t=0$ usando $\theta_0=0$ e $R=1$):



$p=1$ e $n=1$ $p=1$ e $n=2$ $p=1$ e $n=3$



$p=2$ e $n=1$ $p=2$ e $n=2$ $p=3$ e $n=1$

6) Considere a série de Fourier-Bessel de ordem 0 da função $f(x)=1$ (vide exercício 1). Utilize-a para mostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2}=\frac{1}{4}$$

onde λ_1, λ_2, ..., λ_k são as raízes de $J_0(x)$. [Dica: adapte Parseval...]

7) Em alguns problemas, voce pode querer escrever uma função $f(x)$ como

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_p(\alpha_n x)$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, ...$ sao as raízes da **derivada** $J_p'(x)$.
a) Use a equação 14.1 para verificar que as funções $J_p(\alpha_n x)$ são ortogonais no intervalo $[0,1]$ (de acordo com o produto interno com peso x).
b) Suponha que $p > 0$ (assim evitamos a raiz $\alpha_0 = 0$). Neste caso, mostre que os coeficientes c_n devem ser

$$c_n = \frac{2\alpha_n^2}{(\alpha_n^2 - p^2) J_p^2(\alpha_n)} \int_0^1 x f(x) J_p(\alpha_n x)\, dx$$